Après quelques transformations élémentaires, on trouve

$$\frac{1}{\log(1+x)} = \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{24} \tag{23}$$

d'où finalement

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log(1+x)} = r_2 r_1 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{6} \ldots$$

Pour le deuxième terme, nous admettons que $r_2 + r_1 \simeq 2\, r_1$.

On obtient pour le rayon effectif :

$$r_{0_1} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{6}}.$$

L'expression (22) peut encore s'écrire :

$$r_{0_2} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{4}}.$$

D'autres auteurs (Klein, en particulier) définissent la section effective comme la moyenne des sections de cylindre et du piston. Ceci équivaut à un rayon effectif :

$$r_{0_3} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{2}}.$$

Comme la différence $r_2 - r_1$ est inférieure à $\frac{r_1}{1.000}$, il en résulte que les trois valeurs du rayon effectif diffèrent entre elles de moins de $\frac{1}{1.000.000}$, ce qui est parfaitement négligeable.

On peut donc conclure, que par suite de l'écoulement visqueux autour du piston, le rayon effectif est égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et cylindre.

B. Enfoncement du piston. — Par suite de la fuite du liquide de compression autour du piston celui-ci descend lentement. Ceci a pour résultat que la vitesse du liquide qui s'écoule ne s'annulera pas à la surface du piston; par conséquent la distribution des vitesses et donc également l'expression pour le rayon effectif s'en trouveront modifiées.

La vitesse au rayon r sera toujours donnée par :

$$v = -\frac{P r^2}{4 \eta L} + C \log r + K.$$

Toutefois avec les conditions aux limites $v = o$ pour $r = r_2$, $v = v_1$ pour $r = r_1$, v_1 étant la vitesse de descente du piston.

On aura encore que :

$$r_0 = \sqrt{\frac{2 \eta L C}{P}}.$$

La valeur de C s'obtient facilement puisque :

$$-\frac{Pr_1^2}{4\eta L} + C \log r_1 - v_1 = -\frac{Pr_2^2}{4\eta L} + C \log r_2 \; C = -\frac{P}{4\eta L}\frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}} + \frac{v_1}{\log \frac{r_1}{r_2}}.$$

D'où finalement pour la valeur de r_0^2

$$r_0^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}} - \frac{2 v_1}{\frac{P}{\eta L} \log \frac{r_2}{r_1}}.$$

Comme la surface effective vaut $Se = \pi r_0^2$ on trouve maintenant une différence de :

$$\Delta Se = \frac{2\pi v_1 \eta L}{P \log \frac{r_2}{r_1}}$$

avec la valeur trouvée précédemment.

On peut de nouveau développer en série

$$\frac{1}{\log \frac{r_2}{r^1}}$$

et limitant le développement au premier terme, l'augmentation de la section effective devient :

$$\Delta Se = \frac{2\pi \eta L v_1 r_1}{P (r_2 - r_1)}. \tag{24}$$

Cette valeur s'obtient facilement, si l'on connaît la vitesse de descente du piston v_1 en fonction de la pression. Les mesures effectuées par MICHELS montrent que cette fonction est linéaire, avec une grande approximation. Il est toutefois possible de calculer directement v_1 en fonction des rayons r_1 et r_2.

A condition que la fuite soit due uniquement au liquide qui s'échappe autour du piston on peut écrire $v_1 = \frac{Q}{\pi r_1^2}$ où Q est débit. D'autre part Q est défini par

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} v \, 2\pi r \, dr. \tag{25}$$

La vitesse v est donnée par (18). A partir de (18) et (19) on détermine la constante K.

$$K = \frac{Pr_2^2}{4\eta L} + \frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}} \quad \text{ou} \quad K = \frac{P}{4\eta L} r_2^2 + \frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}}. \tag{26}$$